

Programme de colle n°3

semaine du 29 septembre au 3 octobre

Notions vues en cours

Chapitre 4 : Somme et produits

- Factorielle, Coefficient binomial $\binom{n}{k}$: définition, symétrie, triangle de Pascal. Par convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$. Application au calcul de produits
- Binôme de Newton : il faut connaître la formule et savoir l'appliquer rapidement pour de petites valeurs de la puissance.
- Sommes doubles : notations $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}$ et $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij}$ et $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}$, sommes doubles rectangulaires et triangulaires, interversion de $\sum$, formule $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_i c_j) = \left(\sum_{i=1}^m b_i \right) \left(\sum_{j=1}^n c_j \right)$.

Chapitre 5 : Trigonométrie :

- Pour les fonctions $\cos$, $\sin$ et $\tan$: valeurs particulières, formules d'addition, de duplication. Formules de linéarisation $\cos a \cos b$, $\sin a \sin b$, $\sin a \cos b$
- Congruences dans les réels : $x \equiv a \pmod{b}$ équivaut à dire que $x \in a + b\mathbb{Z}$. Règles d'addition et de multiplication par une constante dans une congruence.
- Caractérisations de $\cos a = \cos b$, $\sin a = \sin b$ et de $\tan a = \tan b$, résolution d'(in)équations trigonométriques.
On devra donner explicitement l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de toute (in)équation trigonométrique : par exemple pour une inéquation l'ensemble est typiquement de la forme $\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [a_k, b_k] \dots$
- Formules de l'angle moitié, cotangente
- Résolution d'équations du type $a \cos x + b \sin x = c$ en réécrivant $a \cos x + b \sin x$ en $A \cos(x - \varphi)$ pour des réels a et b qui le permettent.

Chapitre 6 : Nombres complexes :

- Généralités : nombre i , ensembles $\mathbb{C}$ et $i\mathbb{R}$, forme algébrique, partie réelle, partie imaginaire, deux complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, $\mathbb{R}$ -linéarité de la partie réelle et de la partie imaginaire
- Opérations $+$, $-$, $\times$, $/$ dans $\mathbb{C}$, généralisation des formules $\sum_{k=0}^n x^k$, $a^n - b^n$ et du binôme aux complexes
- Plan complexe, affixe d'un point, d'un vecteur. Conjugué d'un complexe : définitions, propriétés élémentaires, interprétation géométrique
- Module : définitions, propriétés élémentaires, interprétation géométrique
- Identité remarquable $|z + z'|^2$, première inégalité triangulaire, seconde inégalité triangulaire.
- Cas d'égalité : on a $|u + v| = |u| + |v|$ si et seulement si u et v sont positivement liés, i.e. si u est nul, ou v est nul ou si $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* \quad u = \lambda v$
- Différentes caractérisations de $z \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}_+$, $z \in \mathbb{R}_-$, $z \in i\mathbb{R}$ en termes de partie réelle, partie imaginaire, conjugué et de module

La forme trigonométrique et l'exponentielle complexe ne sont pas au programme cette semaine.

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examineur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **3 à 5**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaître.*

1. Triangle de Pascal (sans démonstration) et binôme de Newton (avec démonstration) Chapitre 4, Théorèmes 4.17 et 4.18
2. Formules de trigonométrie (*sans démonstration*) : pour les fonctions $\cos$, $\sin$ et $\tan$, donner les formules d'addition, de duplication, de $\cos a \cos b$, $\sin a \sin b$, $\sin a \cos b$. L'examineur demandera également deux formules de changement de cadran (Théorème 5.4) et deux valeurs particulières à donner, par exemple $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ou $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Chapitre 5, Théorèmes 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.12
3. Identité remarquable et inégalités triangulaires. On ne prouvera pas la seconde inégalité triangulaire. Sans démonstration : à quelle condition a-t-on égalité dans la première inégalité triangulaire ? Chapitre 6, Théorème 6.12, Définition 6.13 et Théorème 6.14

Questions Flash au programme :

Chapitre 5 :

- Pour cosinus, sinus ou tangente : une formule à compléter parmi les formules de changement de quadrans, d'addition, de duplication, au choix de l'examineur.
- Compléter : $\cos a = \cos b \iff \dots$
- Compléter : $\sin a = \sin b \iff \dots$
- Compléter : $\tan a = \tan b \iff \dots$
- Quel est l'ensemble de définition de la fonction tangente ?

Chapitre 4 :

- Compléter les formules $\sum_{k=1}^n k = \dots$ et $\sum_{k=1}^n k^2 = \dots$
- Compléter la formule $a^n - b^n = \dots$
- Compléter la formule $\sum_{k=0}^n x^k = \dots$
- Donner la définition de $\binom{n}{k}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$.
- Énoncer la propriété du triangle de Pascal.
- Compléter la formule $(a+b)^n = \dots$
- Compléter : $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \sum_{i=\dots}^{\dots} a_{ij}$

Chapitre 3 :

- Compléter : $\forall a \in \dots \quad \sqrt{a^2} = \dots \quad \text{et} \quad \forall a \in \dots \quad \sqrt{a^2} = \dots$

- Énoncer la première inégalité triangulaire.
- Énoncer la seconde inégalité triangulaire.
- Si $a \leq b$, à quelle condition sur a et b peut-on en déduire $a^2 \leq b^2$?
- Si $a \leq b$, à quelle condition sur a et b peut-on en déduire $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$?
- Si $a \leq b$, à quelle condition sur a et b peut-on en déduire $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$?
- Soit x et y deux réels et k un entier. Parmi les formules suivantes, compléter celles qui sont vraies (et seulement celles-là) :

$$\lfloor x + y \rfloor = \dots \quad \lfloor x + k \rfloor = \dots \quad \lfloor 2x \rfloor = \dots$$